2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Пространство R^n. Открытые и замкнутые множества.

Через R^n обозначается множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящих из n действительных чисел. Каждый такой набор называется точкой пространства R^n, а x_i - координатой этой точки. Расстояние между двумя точками $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $(y_1,y_2,\ldots y_n)$ определяется равенством $\rho = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$. Множество R^n с введенным в нем расстоянием между двумя точками называется ***метрическим пространством*** R^n. Метрическое пространство R^n можно рассматривать как векторное пространство, если для его элементов (векторов) $\bar{x} = (x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $\bar{y} = (y_1,y_2,\ldots y_n)$ определить равенство соотношением $(\bar{x}=\bar{y}) \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n)$, сумму $\bar{x}+\bar{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$, а произведение $\alpha\bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$, где $\alpha \in R$. Если в пространстве R^n выбрать ортонормированный базис и начало координат, то получим систему координат в R^n - обобщение декартовой системы координат в R^2 и R^3. Пусть $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - точка некоторого множества $D \subset \mathrm{R}^n$. Совокупность точек x множества D, таких, что расстояние $\rho(\bar{x},\bar{x}^0) < \varepsilon$, называется ε-окрестностью точки $\bar{x}^0$ и обозначается $U_\varepsilon(\bar{x}^0)$. Точка $M_0 \in D$ называется внутренней точкой множества D, если она принадлежит множеству D вместе с некоторой своей ε-окрестностью. Множество D называется ***открытым***, если каждая его точка внутренняя. Предельной точкой множества D называется такая точка, любая окрестность которой содержит бесчисленное множество из D. Объединение множества D и множества всех его предельных точек называется замыканием множества D и обозначается $\overline{D}$. Множество D называется **замкнутым**, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. $D = \overline{D}$.

Пример1. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто.

Пример2. Множество вида $U_\varepsilon(M_0) = \left\{(x,y) \in D \subset \mathrm{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon\right\}$, определяющее круг радиуса ε с центром в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, является открытым. Если к нему присоединить окружность $\Gamma = \left\{(x,y) \in D \subset \mathrm{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \varepsilon\right\}$ радиуса ε с центром в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, то получим замкнутое множество $\overline{U}_\varepsilon(M_0) = \left\{(x,y) \in D \subset \mathrm{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \le \varepsilon\right\}$.

2.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Понятие функции многих переменных. Пусть D – некоторое множество точек $M = (x, y)$ плоскости. Правило f, ставящее точке $(x,y) \in D$ определенное число z, называется функцией двух переменных и обозначается

$z=f(x,y)$ или $z=f(M)$. Множество D при этом называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(f)$. Число $z=f(M)$ или $z=f(x,y)$ называется значением функции f в точке $M=(x,y)$. Множество $E(f)=\{z\in R | z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$ называется ***областью или множеством значений*** функции f.

Пример. Для функции $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ областью определения является множество $D(f)=\{(x,y) | 1-x^2-y^2\ge 0\}$, т. е. круг $x^2+y^2\le 1$, а областью значений является отрезок $[0,1]$.

Аналогично определяется функция $u=f(x,y,z)$ трех независимых переменных x,y,z: это правило f, ставящее каждой упорядоченной тройке $(x,y,z)\in D\subset R^3$ число u. Подобным же образом определяется в общем случае и функция $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ от n независимых переменных.

Итак, функция двух переменных $z=f(x;y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости в трехмерном геометрическом пространстве с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек, представляющее собой, вообще говоря, некоторую поверхность в R^3.

Для этого в каждой точке $(x,y)\in D$ вычисляется значение функции $z=f(x;y)$. Тогда тройка чисел $(x,y,f(x,y))$ определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую точку P. Совокупность точек $P=(x,y,f(x,y))$ образует график G_f функции $z=f(x,y)$, являющийся некоторой поверхностью в пространстве R^3 (рис. 1). Будем говорить, что задана поверхность $z=f(x,y)$, имея в виду график G_f, определяемый этой функцией.

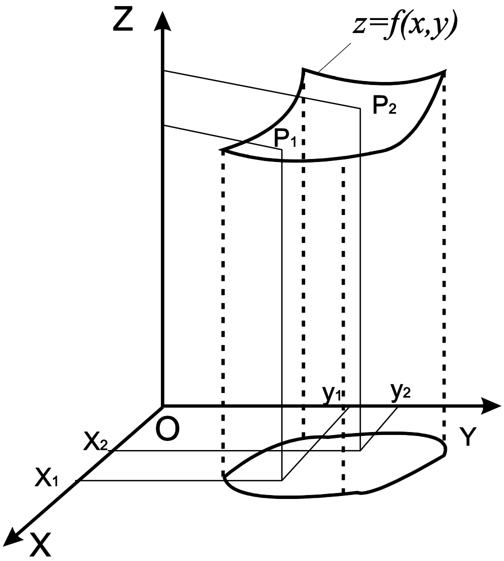

Рис. 1

Пример 1. Графиком функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является верхняя полусфера с центром в точке O радиуса 1.

Пример 2. Графиком функции $z=3x+2y+1$ является плоскость.

В некоторых случаях наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий или поверхностей уровня.

Линией уровня функции $z=f(x;y)$ называется такая линия $f(x,y)=C$ на плоскости Oxy, в точках которой функция принимает одно и то же значение $z=C$ (обычно проставляемое на чертеже в виде отметки), где C – постоянная.

Пример. Для функции $z=x^2+y^2$ линиями уровня являются окружности $x^2+y^2=C$, $C\ge 0$ (рис. 2). Линия уровня $f(x,y)=C$ является проекцией на плоскость Oxy линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = C$ (рис. 2).

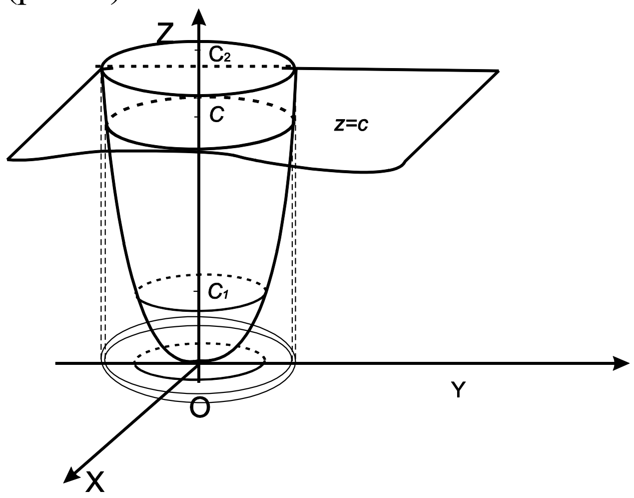

Рис. 2

Линии уровня используются в картографии. Так, например, на топографических картах рисуют линии равной высоты над уровнем моря. На метеорологических картах изображают линии одинакового давления – изобары.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек (x, y, z) пространства, удовлетворяющих равенству $f(x, y, z) = C$, где C – постоянная. Например, поверхностями уровня для функции $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ являются эллипсоиды $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = C$, «вложенные» друг в друга, $C \geq 0$. В физике примером поверхностей уровня могут служить поверхности одинакового давления, температуры и др.

Аналогично вводится понятие поверхности уровня для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, для которых $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$.

Определение предела функции в точке по Коши. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(a, b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < \rho < \delta$, где $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – расстояние между точками M и M_0, имеет место неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A.$$

Определение предела функции в точке по Гейне. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ в точке M_0, если для любой последовательности (M_n), сходящейся к M_0, $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность $(f(M_n))$ значений функции сходится к A. Если для некоторых последовательностей (M'_n) и (M''_n), сходящейся к M_0, пределы последовательностей $f(M'_n)$ и $f(M''_n)$ не существуют или имеют разные значения, то это означает, что в точке M_0 функция f предела не имеет.

Пример. Выяснить, имеет ли функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ предел в точке $O = (0,0)$.

Пусть сначала точка $M(x,y)$ стремится к точке O по оси X, т. е. $M=(x,0)$. Тогда $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2+0}=0$.

Аналогично при стремлении точки $M(x,y)$ к точке O по оси Y, т. е. $M=(0,y)$. Тогда $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{0+y^2}=0$.

Пусть теперь точка M стремится к точке O вдоль прямой $y=kx$, т. е. $M=(x,kx)$. Тогда $\lim\limits_{(x,kx)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x^2}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{k^2}{1+k^2}$.

Таким образом, при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $O=(0,0)$ вдоль разных лучей получаются разные пределы. Следовательно, искомая функция в точке O предела не имеет.

Если существуют $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ и $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B$, то имеют место следующие ***свойства пределов***:

1) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\pm g(M)]=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\cdot g(M)]=A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{A}{B}$; ($B\neq 0$).

Повторные пределы. Если зафиксировать переменную y, то функция $z=f(x;y)$ становится функцией одной переменной x, где $x\in[a(y),b(y)]$. Можно поставить вопрос о существовании предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A(y)$. Затем можно поставить вопрос о существовании предела $\lim\limits_{y\to y_0} A(y)=\lim\limits_{y\leftarrow y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, который и называется повторным пределом.

Аналогично вводится повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0} B(x)=\lim\limits_{x\leftarrow x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, где $B(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. Не следует думать, что повторные пределы необходимо равны.

Пример. Найти повторные пределы функции $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $(0,0)$.

Имеем

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Итак, в этом примере повторные пределы оказались различными. Этот факт доказывает, что необходимо соблюдать осторожность при перестановке переходов по разным переменным.

Функция $z=f(x,y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0=(x_0,y_0)$, если ее предел в точке M_0 равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)}.$$

Функция, непрерывная в каждой точке области D, непрерывна в области D. Точки, в которых функция не определена или не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Пример. Для функции $z=\frac{1}{4x^2-25y^2}$ точки разрыва образуют множество точек плоскости OXY, определяемое равенством $4x^2-25y^2=0$, т. е. точки прямых $y=\pm\frac{2}{5}x$.

Основные свойства функций нескольких переменных, непрерывных в некоторой области D, совпадают с соответствующими свойствами функции одной переменной. Кратко сформулируем некоторые из их.

1) Если f и g - непрерывные в точке M_0 функции, то непрерывными в ней будут и функции $f\pm g$, $f\cdot g$, f/g, если $g(M_0)\neq 0$.
2) Промежуточное значение непрерывной функции. Если функция $u=f(M)$ непрерывна на связном множестве (состоит из единого «куска») D и $f(A)$ и $f(B)$ - значения ее соответственно в точках $A,B\in D$соответственно, то для любого C из отрезка $[f(A), f(B)]$ найдется точка $\xi\in D$такая, что $f(\xi)=C$.
3) ***Теорема Вейерштрасса***. Если функция $u=f(M)$непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $D\in \mathrm{R}^n$, то она ограничена на нем и достигает в некоторых точках M_1 и M_2 этого множества своих наибольшего и наименьшего значений.

2.3. Частные производные функций нескольких переменных

Если функция $z=f(x;y)$, то, полагая например y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f'_x(x,y),$$

которая называется частной производной функции z по переменной x. Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y. Очевидно, что для нахождения частных производных можно пользоваться обычными формулами дифференцирования.

Обозначение частной производной возможно одним из следующих символов:

$$z'_x,\ f'_x,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}\left(z'_y,\ f'_y,\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Пример1. Найти частные производные функции $z=x^2-2xy^2+y^3$.

Частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ находим как производную функции $z = f(x;y)$ по переменной x в предположении, что $y = const$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_x = 2x - 2y^2 + 0 = 2(x - y^2).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_y = 0 - 4xy + 3y^2 = y(3y - 4x).$$

Пример 2. Найти частные производные функции $z = \ln tg\frac{x}{y}$.

Рассматриваем y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{tg\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{tg\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Пример 3. Найти частные производные функции трех аргументов $u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz - 3, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2 + 1.$$

Пример 4. Найти частные производные функции $u = x^{y^z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z}\ln x \cdot zy^{z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z}(\ln x)y^z\ln y.$$

2.4. Производные сложных функций нескольких переменных

Если $z = f(x;y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $z = f(x(t);y(t))$ является сложной функцией от t, тогда

$$\boxed{z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t}. \qquad (2.4.1)$$

Если $z = f(x;y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, тогда

$$\boxed{\begin{cases} z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u \\ z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v \end{cases}}. \qquad (2.4.2)$$

Пример1. Найти частную производную z'_t, если $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$.

Согласно формуле (2.4.1) имеем

$$z'_t = \left(\frac{y}{x}\right)'_x \cdot (e^t)'_t + \left(\frac{y}{x}\right)'_y \cdot (1 - e^{2t})'_t = -\frac{y}{x^2} \cdot e^t + \frac{1}{x} \cdot (-2e^{2t}) = -(e^t + e^{-t}).$$

Пример2. Найти частные производные z'_u и z'_v, если $z = x^2 y^2$, $x = u + v$, $y = \frac{u}{v}$.

Согласно формулам (2.4.2) имеем

$z'_u = 2xy^2 \cdot 1 + 2x^2 y\left(\frac{1}{v}\right)$; $z'_v = 2xy^2 \cdot 1 + 2x^2 y\left(-\frac{u}{v^2}\right)$.

2.5. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Полным приращением функции $z = f(x;y)$ называется разность

$\Delta z = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Полным дифференциалом dz функции $z = f(x;y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно аргументов Δx и Δy, т.е. $dz = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y$.

Дифференциалами независимых переменных x и y назовем приращения этих переменных: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде

$$dz = f'_x dx + f'_y dy. \tag{2.5.1}$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ полное приращение функции приближенно равно его дифференциалу $\Delta z \approx dz$ или $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Пример1. Найти дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ **.**

Согласно формуле (2.5.1) получим

$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $dz = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Пример 2. Приближенно вычислить $1{,}02^{3{,}01}$**.**

Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число можно считать наращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Первоначальное значение функции $z(1;3) = 1^3 = 1$, $z(1{,}02;3{,}01) = z(1;3) + \Delta z$;

$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y = 3 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}06$.

$1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}006$.

2.6. Производная функции в данном направлении и градиент функции

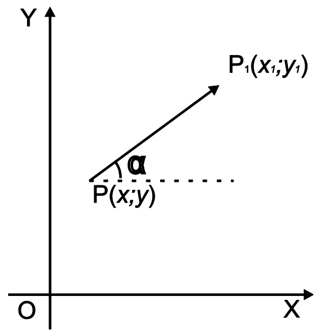

Рис. 3

Производной функции $z = f(x;y)$ в данном направлении $\bar{l} = \overrightarrow{PP_1}$ называется $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{P_1P \to 0} \dfrac{f(P_1) - f(P)}{P_1P}$, где $f(P)$ и $f(P_1)$ - значения функции в точках P и P_1.

Если функция $f(P)$ дифференцируема в точке $P(x;y)$, то в точке $P(x;y)$ существует производная по любому направлению $\bar{l}$, исходящему из $P(x;y)$ и справедлива формула:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta}, \qquad (2.6.1)$$

где α – угол, образованный вектором $\bar{l}$ с осью Ox (рис. 3), а β – угол, образованный вектором $\bar{l}$ с осью Oy. В силу того, что $\cos\beta = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$, в некоторых случаях удобна формула:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha} \qquad (2.6.2)$$

Аналогично определяется производная в данном направлении $\bar{l}$ для функции трех аргументов $u = f(x;y;z)$. В этом случае

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}, \qquad (2.6.3)$$

где α, β, γ – углы между направлением $\bar{l}$ и соответствующими координатными осями. Производная в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Пример1. Найти производную функции $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке $P(1;0)$ в направлении, составляющим с осью Ox угол 120°.

Решение. Найдем частные производные функции и их значения в т. P;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 0.$$

Здесь, $\cos\alpha = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$, $\quad \sin\alpha = \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Применяя формулу (2.6.2), получим

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

Пример2. Температура тела в пространстве задается функцией $T = x^2y + yz - e^{xy}$. Найти скорость изменения температуры в точке $M = (1,1,1)$ в направлении от этой точки к началу координат.

Найдем координаты вектора $\bar{l}=(-1,-1,-1)$. Тогда направляющие косинусы этого вектора вычисляются по формулам: $\cos\alpha=\frac{l_x}{|\bar{l}\,|}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\frac{l_y}{|\bar{l}\,|}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\frac{l_z}{|\bar{l}\,|}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($l_x,\ l_y,\ l_z$ - соответствующие координаты вектора $\bar{l}$). Найдем $\frac{\partial T(M)}{\partial x}=(2xy-ye^{xy})\big|_M=2-e$; $\frac{\partial T(M)}{\partial y}=(x^2+z-xe^{xy})\big|_M=2-e$; $\frac{\partial T(M)}{\partial z}=y\big|_M=1$. Тогда по формуле (1.6.2) получаем $\frac{\partial T(M)}{\partial l}=(2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+(2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2e-5}{\sqrt{3}}$.

Градиентом функции $z=f(x;y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции: $\boxed{\operatorname{grad}\ z=\nabla z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}}$.

Производная данной функции в направлении $\bar{l}$ связана с градиентом функции следующей формулой:

$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l}=np_l\operatorname{grad}\ z}$,т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\bar{l}=\operatorname{grad}\ z$ производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u=f(x;y;z)$

$$\boxed{\operatorname{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}.$$

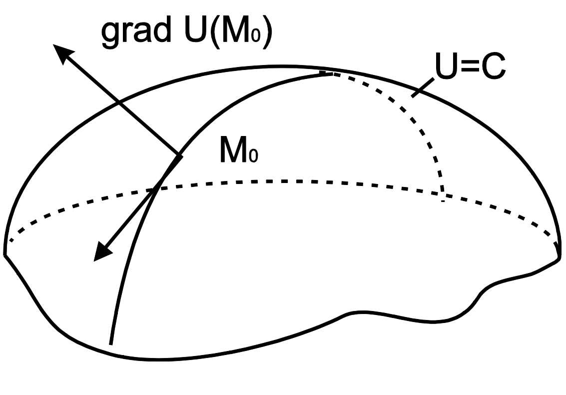

Рис. 4

Градиент функции трех переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня $U=f(x,y,z)=C$, проходящей через эту точку (рис.4).

Итак, если $\operatorname{grad}u(M)\neq 0$, то скорость возрастания функции u максимальна и равна $|\operatorname{grad}u(M)|$ в направлении вектора $\operatorname{grad}u(M)$. В противоположном направлении функция u убывает с максимальной скоростью -

$|\operatorname{grad} u(M)|$. Поэтому направление $\bar{l}$, задаваемое вектором $\operatorname{grad} u$ называется ***направлением наискорейшего подъема***, а направление, определяемого вектором $(-\operatorname{grad} u)$ – ***направлением наискорейшего спуска***.

Пример 3. Найти градиент функции $z = x^2 y$ в точке $P(1;1)$.

Частные производные и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} z = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Пример 4. Плотность распределения вещества в пространстве задается функцией $\rho = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + z^2}$. В каком направлении плотность меняется быстрее всего в точке $M_0 = (-1, 3, 2)$? Определить скорость наибольшего изменения плотности в данной точке.

Направление наибольшего возрастания плотности совпадает с направлением $\operatorname{grad} \rho = \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}; \dfrac{\partial \rho}{\partial y}; \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)$. Имеем $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{2x}{1 + z^2}$; $\dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \dfrac{2y}{1 + z^2}$; $\dfrac{\partial \rho}{\partial z} = -\dfrac{2z(x^2 + y^2)}{(1 + z^2)^2}$. Тогда $\operatorname{grad} \rho(M_0) = \left(-\dfrac{2}{5}; \dfrac{6}{5}; -\dfrac{8}{5}\right)$. Итак, в направлении вектора $\left(-\dfrac{2}{5}; \dfrac{6}{5}; -\dfrac{8}{5}\right)$ плотность возрастает максимально со скоростью, равной

$$|\operatorname{grad} \rho(M_0)| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{104}}{5}.$$

2.7. Производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными 2-го порядка функции $z = f(x; y)$ называются частные производные от ее частных производных 1- го порядка.

Для производных 2-го порядка употребляются обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x; y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x; y)$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше 2-го. Частные производные 2-го порядка вида $f''_{xy}(x;y)$, $f''_{yx}(x;y)$ называются смешанными производными.

Если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то ***результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*** Частные производные третьего порядка определяются как частные производные от частных производных второго порядка и т. д.

Дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x;y)$ называется дифференциал от дифференциала (1-го порядка) этой функции

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z).$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше 2-го, например,

$$\mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 z);\ \ldots \qquad \mathrm{d}^n z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} z).$$

Если $z = f(x;y)$, где x и y – независимые переменные и функция f имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial z^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

При наличии соответствующих производных справедлива символическая формула

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

которая формально развертывается по биномиальному закону.

Пример 1. Найти полные дифференциалы 1-ого и 2-ого порядков функции $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y.$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = (4x-3y)\mathrm{d}x - (3x+2y)\mathrm{d}y.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

Откуда следует

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial z^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 = 4\mathrm{d}x^2 - 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}y^2.$$

2.8. Интегрирование полных дифференциалов

Для того чтобы выражение $P(x;y)\mathrm{d}x + Q(x;y)\mathrm{d}y$, где функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны в односвязной области D вместе со своими частными производными 1-го порядка, представляло собой в области D ***полный***

дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}}$$

Пример 1. Убедиться в том, что выражение $(2x+y)dx+(x+2y)$ является полным дифференциалом некоторой функции, и найти эту функцию.

$P = 2x + y$, $Q = x + 2y$. Поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$ и, следовательно,

$$(2x+y)\mathrm{d}x + (x+2y)\mathrm{d}y = du = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \ ,$$

где u – искомая функция.

По условию, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, следовательно,

$$u = \int (2x+y)dx = x^2 + xy + C(y).$$

Но, с другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + c'(y) = x + 2y; \quad c'(y) = 2y, \quad c(y) = y^2 + C,$ $u = x^2 + xy + y^2 + C$.

2.9. Дифференцирование неявных функций

1) ***Случай одной независимой переменной***. Если уравнение $f(x;y) = 0$, где $f(x;y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию от x, то производная этой неявно заданной функции при условии, что $f'_y(x,y) \neq 0$, может быть найдена по формуле

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}}. \qquad (2.9.1)$$

Пример. Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x}$, если $(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$.

Обозначая левую часть данного уравнения через $f(x;y)$, найдем частные производные

$$f'_x(x,y) = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x[(x^2+y^2)^2 - 1],$$

$$f'_y(x,y) = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y[(x^2+y^2)^2 - 1].$$

Отсюда, применяя формулу (2.9.1), получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{6x[(x^2+y^2)^2-1]}{6y[(x^2+y^2)^2-1]} = -\frac{x}{y}$$

Чтобы найти вторую производную, продифференцируем по x найденную первую производную, учитывая при этом, что y есть функция x:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{y - y'_x x}{y^2} = -\frac{y - \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

2) ***Случай нескольких независимых переменных.*** Аналогично, если уравнение $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция переменных x, y и z, определяет z как функцию независимых переменных x и y и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}}, \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}} \qquad (2.9.2)$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

Обозначая левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$, найдем частные производные:

$F'_x(x, y, z) = 2x$, $F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1$, $F'_z(x, y, z) = 6z - y$.

Применив формулы (1.9.2), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x}{6z - y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

2.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1) Уравнения касательной плоскости и нормали для ***случая явного задания*** поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0 (точке касания) называется плоскость, в которой лежат все касательные в точке M_0 к различным кривым, проведенным на поверхности через эту точку (Рис.5).

Нормалью к поверхности S называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

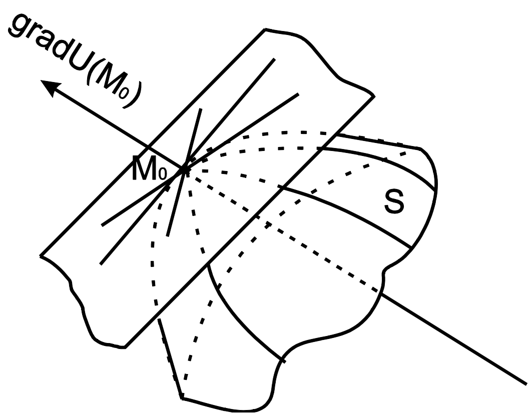

Рис. 5

Если уравнение поверхности в декартовой системе координат задано в явной системе $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – дифференцируемая функция, то ***уравнение касательной плоскости*** в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности есть

$$\boxed{Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0)}. \qquad (2.10.1)$$

Здесь $z_0 = f(x_0, y_0)$, X, Y, Z – текущие координаты точки касательной плоскости.

Уравнения нормали имеют вид

$$\boxed{\frac{X - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z - z_0}{-1}}, \qquad (2.10.2)$$

где X, Y, Z – текущие координаты точки нормали.

Пример. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$ в ее точке $M(2;-1;1)$.

Найдем частные производные данной функции и их значения в т. M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Отсюда, применяя формулы (2.10.1) и (2.10.2), будем иметь

$z - 1 = 2(x-2) + 2(y+1)$ или $2x + 2y - z - 1 = 0$ – уравнение касательной плоскости и

$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ – уравнение нормали.

2) Уравнения касательной плоскости и нормали для ***случая неявного задания*** поверхности. В том случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявной форме $F(x, y, z) = 0$ и $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания, уравнение касательной плоскости к поверхности будет иметь вид:

$$\boxed{F'_x(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0} \qquad (2.10.3)$$

Уравнения нормали имеют вид:

$$\boxed{\frac{X - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}} \qquad (2.10.4)$$

Пример. Написать уравнения плоскости и нормали к поверхности $3xyz - z^3 = 8$ в точке, для которой $x = 0$, $y = 2$.

Найдем координату z точки касания, подставив $x = 0$, $y = 2$ в уравнение поверхности : $-z^3 = 8$, откуда $z = -2$. Таким образом, точка касания есть $M(0, 2, -2)$. Обозначив через $F(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 8 = 0$ найдем частные производные и их значения в точке касания M:

$F'_x = 3yz$; $(F'_x)_M = -12$, $F'_y = 3xz$, $(F'_y)_M = 0$, $F'_z = 3xy - 3z^2$, $(F'_z)_M = -12$.

Применяя формулы (2.10.3) и (2.10.4), получим

$-12(x-0) + 0(y-2) - 12(z+2) = 0$ или $x + z + 2 = 0$ – уравнение касательной плоскости,

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+2}{1}$ – уравнение нормали.

2.11. Экстремум функции нескольких переменных

Функция $f(x,y)$ имеет ***максимум*** (***минимум***) $f(a,b)$ в точке $P(a,b)$, если для всех отличных от P точек $P'(x,y)$ в достаточно малой окрестности точки P выполнено неравенство $f(a,b) > f(x,y)$ ($f(a,b) < f(x,y)$). Максимум или минимум функции называется ее ***экстремумом***. Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

Необходимое условие экстремума. Точки, в которой дифференцируемая функция $f(x,y)$ может достигать экстремума (***стационарные точки***), находятся путем решения системы уравнений

$$\boxed{f'_x(x,y)=0,\ f'_y(x,y)=0}. \qquad (2.11.1)$$

Система (2.11.1) эквивалентна одному уравнению $\mathrm{d}(x,y)=0$. В общем случае в точке экстремума $P(a,b)$ функции $f(x,y)$ или $\mathrm{d}f(a,b)=0$, или $\mathrm{d}f(a,b)$ не существует.

Достаточное условие экстремума. Пусть $P(a,b)$ – стационарная точка функции $f(x,y)$. Пусть $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$ и $A=f''_{xx}(a,b)$, $B=f''_{xy}(a,b)$, $C=f''_{yy}(a,b)$. Составим ***дискриминант*** $\Delta = A\cdot C - B^2$.

Тогда: 1) если $\Delta>0$, то функция имеет экстремум в точке $P(a,b)$, а именно максимум, если $A<0$ (или $C<0$), и минимум, если $A>0$ (или $C>0$); 2) если $\Delta<0$, то экстремума в точке $P(a,b)$ нет; 3) если $\Delta=0$, то вопрос о наличии экстремума функции в точке $P(a,b)$ остается открытым (требуется дальнейшее исследование).

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

Найдем частные производные и составим систему уравнений :

$$\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 3x^2+3y^2-15=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\equiv 6xy-12=0 \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2-5 = 0 \\ xy-2 = 0 \end{cases}.$$

Решим систему методом подстановки $y=\frac{2}{x}$ из 2-го уравнения в 1-ое. Имеем уравнение $x^2+\frac{4}{x^2}-5=0$ или $x^4-5x^2+4=0$, решаем это уравнение относительно x^2, тогда $(x^2)_{1,2}=\begin{cases}1\\4\end{cases}$, т.е. получим четыре корня: $x_1=1; x_2=2; x_3=-1; x_4=-2$, им соответствуют $y_1=2; y_2=1; y_3=-2; y_4=-1$. Итак, получим четыре стационарные точки: $P_1(1;2); P_2(2;1); \mathrm{P}_3(-1;-2); \mathrm{P}_4(-2;-1)$.

Найдем производные 2-го порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x.$

Составим дискриминант $\Delta = A\cdot C - B^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки P_1: $A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6$, $B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{P_1}=12$, $C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=6$;

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 114 < 0$. Следовательно, в точке P_1 экстремума нет.

2) Для точки P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 > 0$. Следовательно, в точке P_2 функция имеет минимум. Минимум этот равен значению функции при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Для точки P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$; $\Delta = 36 - 114 < 0$. Следовательно, Следовательно, в точке P_3 экстремума нет.

4) Для точки P_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$; $\Delta = 144 - 36 > 0$, $A < 0$. Следовательно, в точке P_4 функция имеет максимум. Максимум этот равен значению функции при $x = -2$, $y = -1$: $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

2.12. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в ***стационарной*** точке, или в точке ***границы области***.

Пример. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3$.

Указанная область есть треугольник (рис. 6).

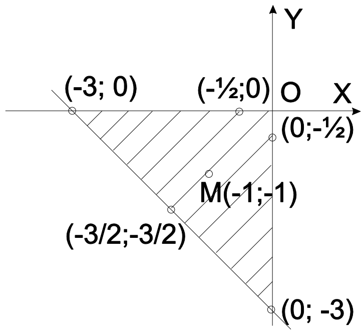

Рис. 6

1) Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x - y + 1 = 0 \\ z'_y \equiv 2y - x + 1 = 0 \end{cases};$$

Отсюда $x = -1, y = -1$; получаем точку $M(-1;-1)$. В точке M значение функции $z_M = -1$. Исследование на экстремум не обязательно.

2) Исследуем функцию на границах области. При $x = 0$ имеем $z = y^2 + y$ и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений этой функции одного аргумента на отрезке $-3 \le y \le 0$.
Проведя исследование, найдем, что $(z_{наиб})_{x=0} = 6$ в точке $(0;-3)$;
$(z_{наим})_{x=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

При $y = 0$ получаем $z = x^2 + x$. Аналогично найдем, что $(z_{наиб})_{y=0} = 6$ в точке $(-3;0)$; $(z_{наим})_{y=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

При $x + y = -3$ или $y = -3 - x$ будем иметь $z = 3x^2 + 9x + 6$. Аналогичным образом найдем, что $(z_{наим})_{x+y=-3} = -\dfrac{3}{4}$ в точке $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$; $(z_{наиб})_{x+y=-3} = 6$ совпадает с $(z_{наиб})_{x=0}$ и $(z_{наиб})_{y=0}$.

3) Сопоставляя все полученные значения функции z, заключаем, что $(z_{наиб})_{y=0}=6$ в точках $(0;-3)$ и $(-3;0)$; $(z_{наим})=-1$ в стационарной точке M.

2.13. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Пусть функция $f(x,y)$ имеет в окрестности точки (a,b) непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)-го$ включительно. Тогда в рассматриваемой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x,y) \qquad (2.13.1)$$

где $R_n(x,y)=\dfrac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\dfrac{\partial}{\partial x}+(y-b)\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\left[a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)\right] \quad (0<\theta<1)$.

Частный случай формулы (2.13.1) при $a=b=0$ называется формулой Маклорена.

Аналогичные формулы справедливы для функции трех и большего числа переменных.

Пример. Функцию $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(-2;1)$.

Вычислим $f(-2;1)$:

$f(-2;1)=-(-2)^2+2(-2)\cdot 1+3(1)^2-6(-2)-2(1)-4=1$.

Вычислим предварительно последовательные частные производные и их значения в данной точке $(-2;1)$:

$f'_x(x,y)=-2x+2y-6$; $f'_x(-2;1)=-2\cdot(-2)+2\cdot 1-6=0$,

$f'_y(x,y)=2x+6y-2$; $f'_y(-2;1)=2\cdot(-2)+6\cdot 1-2=0$,

$f''_{xx}(x,y)=-2$; $f''_{yy}(x,y)=6$; $f''_{xy}(x,y)=2$,

$f'''_{xxx}=0$ и все дальнейшие производные тождественно равны нулю.

Подставляя найденные результаты в формулу (2.13.1), получим:

$$f(x,y)=1+\frac{1}{1!}\left[0\cdot(x+2)+0\cdot(y-1)\right]+\frac{1}{2!}\left[-2(x+2)^2+2\cdot 2\cdot(x+2)(y-1)+6(y-1)^2\right]=$$

$$=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$$

ЗАДАНИЯ

1. Найти области определения функций, заданных следующими формулами:

1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 2) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; 3) $z=\ln(x+y)$; 4) $u=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}}$;

5) $z=\sqrt{xy}$; 6) $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}$; 7) $u=\ln(z^2-x^2-y^2-1)$; 8) $u=\dfrac{x+y-z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$;

Ответ 1) вся плоскость, кроме точки $(0;0)$; 2) $|y|\le|x|$; 3) $x+y>0$; 4) $x^2+y^2-z^2<1$; 5) $x\ge 0, y\ge 0; x\le 0, y\le 0$ (1 и 3-ий квадранты); 6) $|y|\le x^2, x\ne 0$; 7) $x^2+y^2-z^2<-1$; 8) $x^2+y^2+z^2<4$.

2. Построить линии уровня следующих функций:

1) $z=xy$; 2) $z=x+y$; 3) $z=\dfrac{x}{y}$; 4) $z=x^2y+y$; 5) $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$; 6) $z=x\sqrt{y-1}$;

Ответ 1) Гиперболы $y=C/x$; 2) прямые $x+y=C$; 3) Лучи $y=Cx$; 4) Кривые $y=C/x^2+1$; 5) Параболы $y=Cx^2$; 6) Кривые $y=\dfrac{C^2}{x^2}+1$.

3. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функций:

1) $z=x^3+y^3-3axy$; 2) $z=\dfrac{y}{x}$; 3) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; 4) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 6) $z=arctg\dfrac{y}{x}$; 7) $z=x^y$; 8) $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$; 9) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$;

10) $z=\dfrac{xy}{x+y}$; 11) $z=x^2\sin y$; 12) $z=e^{xy}$; 13) $z=xye^{x+2y}$; 14) $z=\ln(x+\ln y)$;

15) $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 16) $z=xe^{-yx}$;

Ответ 1) $z'_x=3(x^2-ay)$; $z'_y=3(y^2-ax)$; 2) $z'_x=-\dfrac{y}{x^2}$; $z'_y=\dfrac{1}{x}$; 3) $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $z'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 4) $z'_x=\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$; $z'_y=-\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$; 5) $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$; 6) $z'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $z'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; 7) $z'_x=yx^{y-1}$; $z'_y=x^y\ln x$; 8) $z'_x=-\dfrac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x}$; $z'_y=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x}$; 9) $z'_x=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$; $z'_y=-\dfrac{2x}{(x+y)^2}$; 10) $z'_x=\dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; $z'_y=\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$; 11) $z'_x=2x\sin y$; $z'_y=x^2\cos y$; 12) $z'_x=y\mathrm{e}^{xy}$; $z'_y=x\mathrm{e}^{xy}$;

13) $z'_x=\mathrm{e}^{x+2y}y(1+x)$; $z'_y=e^{x+2y}x(1+2y)$; 14) $z'_x=\dfrac{1}{x+\ln y}$; $z'_y=\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$;

15) $z'_x=\sqrt{y}-\dfrac{y}{3x\sqrt[3]{x}}$; $z'_y=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 16) $z'_x=e^{-xy}(1-xy)$; $z'_y=-x^2e^{-xy}$.

4. Найти: $f'_x(2;1)$ и $f'_y(2;1)$, где $f(x;y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$. Ответ $f'_x(2,1)=1/2$; $f'_y(2,1)=0$.

5. Найти: $f'_x(1;2;0)$, $f'_y(1;2;0)$, $f'_z(1;2;0)$ если $f(x;y,z)=\ln(xy+z)$.

Ответ $f'_x(1;2;0)=1$; $f'_y(1;2;0)=1/2$; $f'_z(1;2;0)=1/2$

6. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z=x^2+xy+y^2$ $x=t^2$, $y=t$.

7. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z=\frac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$. Ответ $z'_t=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.

8. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$, если $u=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$ $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

Ответ $z'_t=\frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6-\frac{x}{2y^2}\right)$.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z=\frac{y}{x}$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$. Ответ $z'_t=-\left(e^t+e^{-t}\right)$.

10. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z=x\sin\frac{x}{y}$, $x=1+3t$, $y=\sqrt{1+t^2}$.

Ответ $z'_t=3\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

11. Найти $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z=x^y$, $y=\varphi(x)$. Ответ $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=x^y\left[\varphi'_x\ln x+\frac{y}{x}\right]$.

12. Найти $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z=arctg\frac{y}{x}$ и $y=x^2$. Ответ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}$.

13. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$. Ответ $z'_t=0$.

14. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2y^2$, $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$. Ответ $z'_u=2xy^2+2x^2y\cdot\frac{1}{v}$;

$z'_v=2xy^2-2x^2y\cdot\frac{u}{v^2}$.

15. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\frac{x^2}{y}$ $x=u-2v$, $y=v+2u$. Ответ $z'_u=\frac{2x}{y}-\frac{2x^2}{y^2}$;

$z'_v=-\frac{4x}{y}-\frac{x^2}{y^2}$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=arctg\frac{x}{y}$ $x=u\sin v$, $y=u\cos v$. Ответ $z'_u=0$; $z'_v=1$.

17. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=e^{3x+2y}$ $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$. Ответ $z'_u=e^{3x+2y}\left(3v+\frac{2}{v}\right)$;

$z'_v=ue^{3x+2y}\left(3-\frac{2}{v^2}\right)$.

18. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $z=x^3+y^3-3xy$; 3) $z=yx^y$; 4) $z=x^2y^3$; 5) $z=\ln(x^2+y^2)$;
6) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 7) $f(x;y)=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$; 8) $z=\sin^2 x+\cos^2 y$; 9) $u=xyz$;

Ответ 1) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$; 2) $\mathrm{dz}=3(x^2-y)\mathrm{d}x+3(y^2-x)\mathrm{d}y$;
3) $\mathrm{dz}=y^2\mathrm{x}^{y\text{-}1}\mathrm{d}x+x^y(1+\mathrm{y}\ln \mathrm{x})\mathrm{d}y$; 4) $\mathrm{dz}=2xy^3\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{y}^2\mathrm{d}y$; 5) $\mathrm{dz}=\dfrac{2}{x^2+y^2}(\mathrm{xd}x+y\mathrm{d}y)$;
6) $\mathrm{dz}=\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(\mathrm{yd}x-x\mathrm{d}y)$; 7) $\mathrm{d}f=\dfrac{1}{x+y}\left(\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y\right)$; 8) $\mathrm{dz}=\sin 2x\mathrm{d}x-\sin 2y\mathrm{d}y$; 9) $\mathrm{d}u=yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{dz}$.

19. Найти полный дифференциал функции в точке $M(1;1)$: $\mathrm{d}f(1;1)$, если $f(x;y)=\dfrac{x}{y^2}$. Ответ $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

20. Найти $\mathrm{d}f(3;4;5)$, если $f(x;y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ответ $\mathrm{d}f(3,4,5)=\dfrac{1}{25}(5\mathrm{d}z-3\mathrm{d}x-4\mathrm{d}y)$.

21. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала:
1) $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$; 2) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$; 3) $\sin 32^o\cdot\cos 59^\circ$; (при переводе градусов в радианы и при вычислении $\sin 60^o$ брать три значащие цифры; последний знак округлить). Ответ 1) 1,00; 2) 4,998; 3) 0,273).

22. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке $M(1;1)$ функции $z=x^3y-5xy^2+8$.
Ответ $\dfrac{\partial z}{\partial l}=-\dfrac{11}{2}\sqrt{2}$.

23. Найти производную по направлению функции $z=\ln(e^x+e^y)$. Рассмотреть направление, параллельное биссектрисе первого координатного угла. Ответ $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{e^x\cos\alpha+e^y\sin\alpha}{e^x+e^y}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

24. Найти производную по направлению функции $z=x^2+y^2$ в точке $M(1;1)$. Рассмотреть случаи, когда направление составляет с осью Ox угол: 1) $\pi/3$; 2) $\pi/6$; 3) $\pi/2$. Ответ $\left(\dfrac{\partial z}{\partial l}\right)_M=2(\cos\alpha+\sin\alpha)$, 1) $1+\sqrt{3}$; 2) $1+\sqrt{3}$; 3) 2.

25. Найти производную по направлению функции $u=x^2-2xz+y^2$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где $M_1(2;4;-3)$.
Ответ $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{16}{3}$.

26. Найти скорость изменения функции $u=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в точке $M_0=(1,1,1)$ в направлении вектора $\bar{a}=(8,-4,8)$. Ответ возрастает, 12.

27. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2$ в точке $M(2;3;1)$

Рассмотреть случаи, когда направление совпадает: 1) с направлением радиуса-вектора этой точки; 2) с направлением вектора $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$. Ответ $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\cos\alpha+\frac{2}{3}\cos\beta-2\cos\gamma,\ 1)\frac{2}{\sqrt{14}}$, 2) $\frac{2}{5}$.

28. Найти градиент функции $z=x^3+y^3-3xy$ в точке $P(2;1)$. Ответ $9i-3j$.

29. Найти градиент функции $u=xyz$ в точке $P(1;2;3)$. Ответ $6i+3j+2k$.

30. Найти градиент функции $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ в точке $P(1;1)$. Ответ $\operatorname{grad} z=\{0;-e\}$.

31. Найти модуль и направление градиента функции $u=x^2+y^2+z^2$ в точке $P(2;-2;1)$. Ответ $|\operatorname{grad} u|=6$; $\cos\alpha=2/3,\ \cos\beta=-2/3, \cos\gamma=1/3$.

32. Найти угол между градиентами функции $z=\ln\frac{y}{x}$ в точках $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ и $B(1;1)$. Ответ $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

33. Найти частные производные 2-го порядка от следующих функций:

1) $z=\frac{x^2}{1-2y}$; 2) $z=\sin x\cos y$; 3) $z=x+y+\frac{xy}{x-y}$; 4) $z=xe^y$; 5) $z=arctg\,\frac{x+y}{x}$;

6) $z=\ln(x+e^{xy})$; 7) $z=x^{2y}$; 8) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$; 9) $z=\ln(x^2+y)$;

Ответ 1) $z''_{xx}=\frac{2}{1-2y}$; $z''_{xy}=\frac{4x}{(1-2y)^2}$; $z''_{yy}=\frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. 2) $z''_{xx}=-\sin x\cos y$;

$z''_{xy}=z''_{yx}=-\cos x\sin y$; $z''_{yy}=-\sin x\cos y$. 3) $z''_{xx}=\frac{2y^2}{(x-y)^3}$; $z''_{xy}=z''_{yx}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$;

$z''_{yy}=\frac{2x^2}{(x-y)^3}$ 4) $z''_{xx}=0$; $z''_{xy}=z''_{yx}=e^y$; $z''_{yy}=xe^y$. 5) $z''_{xx}=\frac{4xy+2y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$;

$z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{y^2-2x^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$; $z''_{yy}=-\frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$. 6) $z''_{xx}=\frac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^{xy})^2}$;

$z''_{yy}=\frac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$; $z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{(x^2y+e^{xy})e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}$. 7) $z''_{xx}=2y(2y-1)x^{2y-2}$; $z''_{yy}=4x^{2y}\ln^2 x$;

$z''_{xy}=z''_{yx}=2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$. 8) $z''_{xx}=e^x(\cos y+x\sin y+2\sin y)$; $z''_{yy}=-e^x(x\sin y+\cos y)$;

$z''_{xy}=z''_{yx}=e^x(\cos y+x\cos y-\sin y)$. 9) $z''_{xx}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $z''_{yy}=-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$; $z''_{xy}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$

34. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 1) $z=\sqrt{2xy+y^2}$; 2) $z=arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$.

Ответ 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

35. Найти $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, если $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

Ответ $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$.

36. Найти все частные производные 2-го порядка функции $u=xy+yz+zx$.

Ответ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=1.$

37. Найти d^2z для следующих функций:

1) $z=e^{xy}$; 2) $z=e^{3x-2y}$; 3) $z=\sin(x^2+y^2)$; 4) $z=y\ln x$; 5) $z=x\ln\dfrac{y}{x}$; 6) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

7) $z=e^{x+y^2}$; 8) $z=\dfrac{xy}{x-y}$; 9) $z=e^x\cos y$; 10) $z=x\sin^2 y$.

Ответ 1) $d^2z=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$; 2) $d^2z=e^{3x-2y}(3dx-2dy)^2$; 3);

$d^2z=-4\sin(x^2+y^2)(xdx+ydy)^2+2\cos(x^2+y^{2)}\ [(dx)^2+(dy)^2]$; 4) $d^2z=\dfrac{1}{x}\left[2dxdy-\dfrac{y}{x}(dx)^2\right]$;

5) $d^2z=\dfrac{2}{y}dxdy-\dfrac{x}{y}(dy)^2-\dfrac{(dx)^2}{x}$; 6) $d^2z=\dfrac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

7) $d^2z=e^{x+y^2}[(dx)^2+4ydxdy+(2+4y^2)(dy)^2]$; 8) $d^2z=\dfrac{2}{(x-y)^3}\left[y^2(dx)^2-2xydxdy+x^2(dy)^2\right]$;

9) $d^2z=e^x[\cos y(dx)^2-2\sin ydxdy-\cos y(dy)^2]$; 10) $d^2z=2\sin 2ydxdy+2x\cos 2y(dy)^2$.

38. Найти $df(1;2)$ и $d^2f(1;2)$, где $f(x;y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$. Ответ $df(1;2)=0$; $d^2f(1;2)=6dx^2+2dxdy+4{,}5dy^2$.

39. Найти $d^2f(0;0;0)$, где $f(x;y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$. Ответ $d^2f(0,0,0)=2dx^2+4dy^2+6dz^2-4dxdy+8dxdz+4dydz$.

40. Убедившись, что данные ниже функции являются полными дифференциалами некоторых функций, найти эти функции:

1) $ydx+xdy$; 2) $(\cos x+3x^2y)dx+(x^3-y^2)dy$; 3) $\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}dy$; 4) $\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy$

5) $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$; 6) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.Ответ 1) $xy+C$; 2) $x^3y-\dfrac{y^3}{3}+\sin x+C$;

3) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+2arctg\dfrac{x}{y}+C$; 4) $\dfrac{x}{y}+C$; 5) $\dfrac{x}{x+y}+\ln(x+y)+C$; 6) $\sqrt{x^2+y^2}+C$.

41. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$. Ответ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x}{6z-y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1-4y-z}{6z-y}$.

42. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y=1+y^x$. Ответ $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$.

43. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $y=x+\ln y$.Ответ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y-1}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y}{(1-y)^3}$

44. Найти $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ и $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, если $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$ Ответ $\left(y'_x\right)_{x=1}=3$ или -1; $(y''_{xx})_{x=1}=8$ или -8.

45. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z(x;y)$ задана уравнением $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$. Ответ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-yz}{xy-z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$.

46. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для системы значений $x=-1, y=0, z=1$, если $z(x;y)$ задана уравнением $x^2+y^2-z^2-xy=0$. Ответ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

47. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z(x;y)$ задана уравнением $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

Ответ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$.

48. Найти dz для системы значений $x=2, y=0, z=1$, если $z(x;y)$ задана уравнением $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$. Ответ $dz=0$.

49. Найти dz, если $\ln z=x+y+z-1$. Ответ $dz=\dfrac{z}{1-z}(dx+dy)$.

50. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям: 1) $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ в ее точке $M(2;-1;1)$; 2) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ в точке $M_0(1;2;2)$; 3) $z=\sin\dfrac{x}{y}$ в точке $M_0(\pi;1;0)$; 4) $3xyz-z^3=8$ в точке, для которой $x=0; y=2$; 5) $x^2+y^2+z^2=26$ в точке $M_0(3;4;1)$; 6) $e^z-z+xy=3$ в точке $M_0(2;1;0)$;
Ответ 1) $2x+2y-z-1=0$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. 2) $x+2y+2z=9$; $\dfrac{x-1}{1/2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$;
3) $x-\pi y+z=0$; $\dfrac{x-\pi}{1}=\dfrac{y-1}{-\pi}=\dfrac{z}{1}$; 4) $x+z+2=0$; $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+2}{1}$;
5) $3x+4y+z=26$; $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{1}$; 6) $x+2y=4$; $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$.

51. К поверхности $3x^2+2y^2+z^2=21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $6x-4y-z=0$. Ответ $6x-4y-z=\pm 21$.

52. К поверхности $xy+z^2+xz=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x+2z-y=0$. Ответ $y-x-2z\pm\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=0$.

53. Исследовать на экстремум следующие функции:
1) $z=(x-1)^2+2y^2$; 2) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$; 3) $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$;
4) $z=xy(1-x-y)$; 5) $z=x^3y^2(6-x-y)$ $(x>0;\ y>0)$; 6) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$
Ответ 1) $z_{\min}=0$ при $x=1, y=0$; 2) $z_{\min}=-1$ при $x=1, y=0$; 3) $z_{\min}=-7$; при $x=1, y=2$;
4) $z_{\max}=1/27$ при $x=y=1/3$; 5) $z_{\max}=108$ при $x=3, y=2$;
6) $z_{\min}=-8$ при $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ и при $x=-\sqrt{2}, y=\sqrt{2}$, при $x=y=0$ экстр. нет

54.Определить наибольшее и наименьшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в областях: а) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$; б) $x \ge 0$, $y \le 0$, $x - y \le 1$;.Ответ а) $\max z = 3$ при $x = 0, y = 1$; б) $\max z = 2$ при $x = 1, y = 0$.

55.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$. (Ответ $\max z = 1/4$; $\min z = -128$).

56.Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно Функцию $f(x, y) = e^x \sin y$.Ответ ($y + xy + \dfrac{3x^2 y - y^3}{3}$).

57.Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;1)$ до членов 2-го Порядка функцию $f(x, y) = y^x$. Ответ $(1 + (y-1) + (x-1)(y-1))$.